ONS TOONSTELSEL: PUUR NATUUR!

1. Inleiding

Ons toonstelsel is puur natuur. Niks cultuur. Het is dus niet zo dat de Grieken toevallig een paar tonen kozen. Dat er in de middeleeuwen wat bij kwam en er in de renaissance weer wat toevallige veranderingen waren. Ons toonstelsel is niet ontstaan door een toevallige culturele ontwikkeling. Nee, ons toonstelsel is gebaseerd op puur natuurkundige verschijnselen en kan in wiskundige termen beschreven worden. Toonladders hebben zeven verschillende tonen, niet meer en niet minder. Ook dat is geen toeval, maar natuurgegeven.

2. Geluid

Geluid is een luchttrilling. Luchtdeeltjes hopen zich op en komen in je oor. En je hoort geluid. Veel luchtdeeltjes tegelijk klinken bijvoorbeeld als een knal. Het is geen trilling dwars op de richting van het geluid (transversale golf), maar in de richting van het geluid (longitudinale golf). Ook water kan overigens het medium zijn voor die trillingen.

3. Tonen

Als de verdichting van luchtdeeltjes regelmatig is hoor je een toon:

xxx → xxx → xxx → xxx → xxx → xxx

De eenheid die gebruikt wordt om de frequentie van die luchttrillingen uit te drukken is Hz (hertz). Driehonderd keer een regelmatige verdichting van luchtdeeltjes per seconde heet dan 300 Hz.

4. Boventonen

Als er tussen die luchtverdichtingen wat kleinere regelmatige verdichtingen zitten van luchtdeeltjes

xxx → x → xxx → x → xxx → x → xxx → x → xxx → x → xxx

hoor je een boventoon. En als die boventoon een frequentie heeft die een veelvoud is van de frequentie van de grondtoon (zoals hierboven het geval is, namelijk 600 Hz), dan is het een harmonische boventoon.

Gemakshalve noemen we de toon van 600 Hz de *tweede* harmonische boventoon, omdat hij twee maal de frequentie van de grondtoon heeft. De frequentieverhouding van het aantal luchtdeeltjesverdichtingen van de grondtoon en het aantal luchtdeeltjesverdichtingen van de tweede harmonische boventoon per seconde is in dit voorbeeld 300:600. Eenvoudiger gezegd 1:2. Vanaf nu laten we het woord harmonisch weg en spreken simpelweg over boventonen, maar we bedoelen steeds harmonische boventonen.

5. Intervallen

Een interval is de frequentieverhouding tussen twee tonen. In het voorbeeld hierboven de verhouding 300 Hz : 600 Hz, dus 1:2.

6. Octaven

Pythagoras had een snaar gespannen, tokkelde en hoorde een toon. Hij drukte zijn duim halverwege de snaar in en hoorde een toon die leek op de grondtoon, maar dan (in zijn beleving) acht tonen hoger. Vandaar de term octaaf. Een snaar die twee keer zo kort is, klinkt een octaaf hoger. En een snaar die twee keer zo lang is, klinkt een octaaf lager.

De grondtoon heeft in bovenstaand voorbeeld 300 verdichtingen van luchtdeeltjes per seconde, dus 300 Hz. De toon een octaaf hoger heeft 600 verdichtingen van luchtdeeltjes per seconde, dus 600 Hz. Een octaaf bestaat dus uit twee tonen met een verhouding in luchtdeeljesverdichtingen van één staat tot twee. Een octaaf is een interval met de frequentieverhouding 1:2.

En, zitten er tussen die zeshonderd luchtdeeltjesverdichtingen nog weer kleinere regelmatige luchtdeeljesverdichtingen dan hoor je zachtjes een toon van 1200 Hz. En dat is de vierde harmonische boventoon, het dubbeloctaaf.

Een octaaf heeft dus alles te maken met het getal 2.

Belangrijk: de twee tonen van een octaaf worden als één toon gevoeld. Een gemengd koor dat eenstemmig zingt, zingt eigenlijk in octaafparallellen. Want vrouwen zingen een octaaf hoger dan mannen. Je kunt de twee tonen van een octaaf dus als één toon beschouwen. Ook al maak je één of twee octaafsprongen naar boven of naar beneden, je ervaart dezelfde toon.
150 Hz : 300 Hz : 600 Hz, simpeler: 1/2 : 1/1 : 2/1.

Eén octaaf naar boven betekent het aantal Hz met twee vermenigvuldigen (300 x 2 = 600). Eén octaaf naar beneden betekent een aantal Hz door twee delen (300 : 2 = 150).

Eén octaaf naar boven heeft één factor 2 meer in de teller (2/1), één octaaf naar beneden heeft één factor 2 meer in de noemer (1/2). Hoeveel octaafsprongen je ook maakt, je voelt die tonen als één toon.

7. Wiskundig intermezzo: natuurlijke en gehele getallen, verzamelingen, priemgetallen en exponent 0

Als je telt (1, 2, 3, 4, 5, enzovoorts) som je de -wat wiskundigen noemen- natuurlijke getallen op. De verzameling natuurlijke getallen schrijven ze zo op: {1, 2, 3, 4, ...}. Die accolades geven aan dat het een verzameling is. Die puntjes dat het eindeloos doorgaat. Wiskundigen zijn luie mensen. Ze hebben geen zin om telkens die hele riedel op te schrijven. Voor die verzameling natuurlijke getallen hebben ze een speciaal symbool bedacht: een hoofdletter N met een dubbele streep. De accolades (die aangeven dat het een verzameling is) zitten als het ware in die N ingebakken.

Als je aan de natuurlijke getallen ook de negatieve equivalenten van die getallen toevoegt en bovendien het getal 0 dan krijg je de verzameling gehele getallen {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}. En ook daarvoor is een speciaal symbool: een Z met een dubbele streep.

2 is een priemgetal. Wat is een priemgetal? Priemgetallen zijn een bepaald soort natuurlijke getallen. Wiskundig gezegd: de verzameling priemgetallen is een deelverzameling van de verzameling natuurlijke getallen. In wiskundenotatie:{priemgetal} € N.

De definitie van een priemgetal is: een priemgetal is een natuurlijk getal met precies twee delers. Is 1 een priemgetal? Nee: 1 is alleen door 1 deelbaar en is dus geen priemgetal. 2 is deelbaar door 1 en 2 en heeft dus precies twee delers en is daarom een priemgetal. 3 is een priemgetal, want het heeft alleen de twee delers 1 en 3. En 4 is deelbaar door 1, 2 en 4, heeft dus drie delers en is daarom geen priemgetal. 5 is weer wel een priemgetal. De reeks priemgetallen kun je dus schrijven als {priemgetal € N | precies twee delers}. 2, 3 en 5 zijn de eerste drie priemgetallen. Het gaat verder met 7, 11, 13, 17, 19, 23, enzovoorts.

Het getal 1000 kan ook geschreven worden als 10^3, 10 met exponent 3. Deel je 1000 door 10 dan krijg je 100 = 10^2. Nu dus de exponent 2. Deel je 100 door 10 dan krijg je 10^1. Exponent 1. Deel je 10 door 10, uitkomst 1. Dan ligt het voor de hand verder te gaan met het verlagen van de exponent met één stapje. Dus: $10^0 = 1$. En 1/10 = 10^{-1}, 1/100 = 10^{-2}, 1/1000 = 10^{-3}.

8. Kwinten

Nu drukte Pythagoras zijn duim op één derde van de snaar. Toen hij tokkelde op het korte stukje, hoorde hij een toon die hij herkende als de vijfde toon van zijn toonladder, maar dan een octaaf hoger. Hij hoorde de derde boventoon. De frequentieverhouding tussen de grondtoon en de derde boventoon is 1:3. Hij tokkelde ook op het lange stukje en hoorde toen de vijfde toon van zijn toonladder. Vandaar de term kwint. Het lange stukje was dubbel zo lang als het korte stukje. En dus een octaaf lager. En een octaaf lager betekent door twee delen.

Een kwint is dus een toonverhouding 1:3/2. Een kwint naar boven is een sprong van een eerste toon met een bepaalde frequentie naar een tweede toon met een frequentie van 3/2 maal de frequentie van de eerste toon. Een kwint naar beneden is de sprong van een eerste toon met een bepaalde frequentie naar een tweede toon met een frequentie van 2/3 van de frequentie van de eerste toon.

Een kwintsprong heeft dus altijd te maken met het getal 3.

Beetje verwarrend: een octaaf heeft te maken met het getal 2, een kwint met het getal 3 en later zullen we zien: een terts heeft te maken met het getal 5.

9. Het pythagoreïsche toonstelsel

Pythagoras had zijn duim op één derde van de snaar gedrukt en toen drukte hij binnen dat korte stukje zijn duim wéér op één derde van dát stukje. En vond een nieuwe toon die paste in zijn toonladder. En die truuk herhaalde hij. Zo kwam hij tot het inzicht dat het toonstelsel bestaat uit een reeks tonen met buren die één kwint van elkaar verschillen. De complete reeks heeft 35 tonen:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

Een toon heeft dus een linkerbuurman die een extra factor 3 heeft in de noemer van de frequentieverhouding en een rechterbuurman heeft een extra factor 3 van de frequentieverhouding in de teller. Het aantal luchttrillingen per seconde van twee buurtonen verschilt telkens één factor 3. Twee aangrenzende tonen in deze pythagoreïsche reeks verschillen dus een factor 3^{-1} of 3^{+1}.

De reeks f c g d a e b heet de stamreeks en die moet je in de gaten houden. Die is belangrijk als je wilt begrijpen hoe ons toonstelsel in elkaar zit. Steeds zien we die stamreeks f c g d a e b terugkeren. Links daarvan een halve toon verlaagd (fes-bes) en nog verder links daarvan twee keer een halve toon verlaagd (feses-beses) en rechts van de reeks f c g d a e b een halve toon verhoogd (fis-bis) en nog verder naar rechts twee keer een halve toon verhoogd (fisis-bisis). Stel dat de a een frequentie heeft van 440 Hz (dat is de toon van een stemvork), dan heeft de e de frequentie 3x440=1320 Hz en de b 9x440=3960 Hz.

Dezelfde reeks van 35 tonen, maar dan een octaaf hoger, hoort ook in het pythagoreïsche toonstelsel. Ook twee octaven hoger, drie octaven hoger, enzovoorts horen erbij. En ook de andere kant op: een of meerdere octaven lager. Dus we kunnen steeds een factor 2^x toevoegen: je mag eindeloos schuiven met octaven naar beneden en naar boven. Dus x is niet gelimiteerd. Al kom je op een gegeven moment wel bij de gehoorgrens onder en boven. Babys horen tonen tussen 20 en 20.000 Hz, ouderen horen steeds minder.

Al met al bestaat het pythagoreïsche toonstelsel dus uit de verzameling intervallen $\{2^x.3^y \mid x, y \in Z; -17 \leq y \leq 17\}$.

Nu willen we weten hoe de frequentieverhoudingen van al deze 35 tonen binnen één octaaf liggen, dus tussen de getallen 1 en 2. We schuiven tonen zo veel octaven op tot ze allemaal binnen dat ene octaaf vallen. Stel de a heeft de frequentie 1, dan heeft de e de frequentie 3/2 ($=2^{-1}.3^1$), de b de frequentie 9/8 ($= 2^{-1}.3^2$), de fis 27/16 ($=2^{-4}.3^3$), de cis 81/64 ($=2^{-6}.3^4$), enzovoorts. We zien dat de breuken al snel 'lelijk' worden: grote getallen in teller en noemer.

10. Zeskwintenreeksen

Een zeskwintenreeks definiëren we als een reeks van *zeven* tonen die buren hebben van wie ze één kwint verschillen. Dus zeven aaneensluitende tonen uit de bovenstaande reeks van 35 tonen. Nog even: een toon is een toon, een kwint is een toon*verhouding*, en wel de verhouding 3/2.

11. Toonladders

Van elke zeskwintenreeks van fes tot bis kun je een toonladder maken. Maar niet van de zeven tonen helemaal links, van feses tot beses, en van de zeven tonen helemaal rechts, van fisis tot bisis, want dat zijn chromatische tonen. Zie hoofdstuk 12.

Er zijn vijftien zeskwintenreeksen waar je toonladders van kunt maken. De eerste zeskwintenreeks loopt van fes tot bes:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

De tweede zeskwintenreeks loopt van ces tot f:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

En zo schuif je steeds één toon op en komt uiteindelijk uit bij de zeskwintenreeks die loopt van fis tot bis:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

Vijftien mogelijke reeksen van zeven tonen die één kwint van elkaar verschillen dus. De zeven tonen van een aaneengesloten reeks tonen noemen we laddereigen tonen. Laddereigen mollen en kruisen schrijf je aan het begin van de balk.

12. Chromatiek

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

We kunnen ook incidenteel één van die laddereigen tonen met een halve toon verlagen of verhogen. Dat heet dan een chromatische verlaging of verhoging.

Om van die laddereigen toon naar de chromatische verlaging te gaan moet je dan een sprong maken van zeven tonen naar links. In het voorbeeld as: zeven kwintsprongen naar links geven de chromatisch verlaagde toon ases.

Om van die laddereigen toon naar de chromatische verhoging te gaan moet je dan een sprong maken van zeven tonen naar rechts. In het voorbeeld as: zeven kwintsprongen naar rechts geven de chromatisch verhoogde toon a.

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

Van geel naar blauw: een incidentele, dus chromatische verlaging van de laddereigen as naar ases.
Chromatische verlaging in het algemeen: schuif zeven tonen naar links op.
Van geel naar rood: een incidentele, dus chromatische verhoging van de laddereigen as naar a.
Chromatische verhoging in het algemeen: schuif zeven tonen naar rechts op.

Nog wat voorbeelden: Wil je de g incidenteel verhogen dan pak je de gis zeven kwinten verderop. En je schrijft direct vóór de noot een #. En wil je bijvoorbeeld de bes verhogen dan maak je een sprong van zeven tonen naar rechts. Je komt uit bij de b. En dan maak je de mol die aan het begin van de balk staat ongedaan met een herstelteken. En als je een noot waar al aan het begin van de balk een kruis vóór staat wilt verhogen, dan schrijf je vóór die noot een dubbelkruis. Wil je de g chromatisch verlagen dan maak je een sprong van zeven tonen naar links, de ges, en je schrijft een mol direct vóór de noot. Wil je de laddereigen bes chromatisch verlagen dan schrijf je vóór de noot een dubbele mol. Zo'n teken direct vóór de noot duidt dus altijd op een incidentele, chromatische verhoging of verlaging.

Het pythagoreïsch toonstelsel bestaat dus uit de tonen:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

chromatisch verlaagde tonen chromatisch verlaagde of laddereigen tonen

chromatisch verlaagde of laddereigen of chromatisch verhoogde tonen

laddereigen of chromatisch verhoogde tonen chromatisch verhoogde tonen

13. Waarom zijn er precies zeven tonen in een toonladder?

Even een gedachte-experiment. Zou een toonladder uit één toon met octaafsprongen kunnen bestaan? Ik kies een willekeurige toon, f. Het is maar een voorbeeld, je kunt elke toon nemen. Je hebt één toon en octaafsprongen naar boven en naar beneden. Beetje saai, die monotonische toonladder.

	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

We kunnen aan die ene toon een kwint naar links en een kwint naar rechts toevoegen. Dus: bes f c Subdominant, tonica, dominant. Dat klinkt al een beetje naar Monteverdi. De grondtoon hoeft niet per se de middelste toon te zijn. Dat kan ook de toon links zijn of de toon rechts. Drie mogelijkheden dus. Je zou het een tritonische toonladder kunnen noemen.

We kunnen nog een stapje verder gaan en er nog een kwint links en een kwint rechts bij pakken: es bes f c g Dan hebben we het materiaal voor een pentatonische toonladder. Een pentatonische toonladder bevat vijf verschillende tonen die één kwint van elkaar verschillen.

Elke van die vijf tonen kun je als grondtoon nemen. Er zijn dus vijf verschillende pentatonische toongeslachten. (Voor het begrip toongeslacht zie hoofdstuk 14.) Kies -in ons voorbeeld- een grondtoon, bijvoorbeeld bes. Voeg de andere tonen toe in alfabetische volgorde. En aan het eind herhaal je de grondtoon (maar dan een octaaf hoger). Dan krijg je de pentatonischee toonladder
bes c es f g bes.

Pentatonische toonladders bestaan allemaal uit drie sprongen van een hele toon en twee sprongen van anderhalve toon. Hoe eerder die sprong van anderhalve toon gemaakt wordt hoe vrolijker het klinkt.

Nu voegen we opnieuw een kwint links en een kwint rechts toe en krijgen as es bes f c g d. Een toonladder bestaat dan uit zeven verschillende tonen die één kwint van elkaar verschillen. Waarom zeven tonen? Antwoord: Stel dat we aan die zeven tonen opnieuw een kwint rechts toevoegen dan lijkt die achtste toon erg op de eerste toon, is niets anders dan een verhoging daarvan. Vanaf de achtste toon volgt een nieuwe kwintenreeks met dezelfde intervallen, maar dan allemaal een halve toon hoger. Hetzelfde verhaal gaat op voor de volgende kwint naar links. Je krijgt dan een herhaling van de kwintenreeks, maar dan een halve toon lager. Een kwintenreeks met meer dan zeven tonen zou dus een herhaling zijn van dezelfde tonen, maar dan met alle tonen een halve toon hoger of lager. Daarom heeft ons toonstelsel toonladders van zeven tonen. Geen toeval, natuurgegeven.

14. Toongeslachten

We blijven nog steeds bij hetzelfde willekeurige voorbeeld van de zeven tonen van de zeskwintenreeks as es bes f c g d.

Hoe maak je van die zeskwintenreeks nu een echte toonladder? Met welke toon begin je? Een belangrijke vraag. Het verpletterende antwoord luidt: je kunt met elke van deze zeven tonen beginnen. Elke van de zeven tonen van een zeskwintenreeks kan de grondtoon zijn. Met welke toon je begint bepaalt welk toongeslacht je krijgt. De bekendste toongeslachten zijn majeur en mineur.

De grondtoon (bijvoorbeeld bes) en het toongeslacht (bijvoorbeld majeur) heten toonsoort. In dit geval dus bes majeur.

Majeur krijg je als je de tweede van de zeven tonen van een zeskwintenreeks tot grondtoon bombardeert, in ons voorbeeld de es. Je begint dus met de es en zet de andere tonen er in alfabetische volgorde achter en eindigt weer met de grondtoon: es f g as bes c d es. Voilà, de toonladder van toonsoort es majeur. De toonafstanden van een majeurtoonladder zijn vanaf de grondtoon 1 1 ½ 1 1 1 ½.

De definitie van het toongeslacht mineur is: een reeks van zeven tonen die één kwint van elkaar verschillen, waarbij je de vijfde toon tot grondtoon bombardeert, in ons voorbeeld de c. En je somt dan de andere noten in alfabetische volgorde op en besluit weer met de grondtoon: c d es f g as bes c. Dit is de toonladder van c mineur. De toonafstanden van een mineurtoonladder zijn vanaf de grondtoon 1 ½ 1 1 ½ 1 1.

De overige vijf toongeslachten zijn minder gebruikelijk. Neem je de zesde toon als grondtoon (hier: de g) dan krijg je een soort super-mineur. Dat is het toongeslacht frygisch. Na alfabetische ordening krijg je de toonladder: g as bes c d es f g. Met de toonafstanden ½ 1 1 1 ½ 1 1.

Neem je de eerste toon van de zeskwintenreeks als grondtoon (hier: de as) dan heb je het toongeslacht lydisch en na alfabetische ordening en afsluiting met een herhaling van de grondtoon krijg je een lydische toonladder. Die klinkt hemels, maar ook een beetje saai. Steeds maar van gouden bordjes eten: as bes c d es f g as met de toonafstanden 1 1 1 ½ 1 1 ½.

De derde toon als grondtoon levert de mixolydische toonladder bes c d es f g a bes 1 1 ½ 1 1 1 ½.

De vierde toon de dorische toonladder f g as bes c d es f 1 ½ 1 1 1 ½ 1.

De zevende de lokrische toonladder d es f g as bes c d ½ 1 1 ½ 1 1 1.

Drie mollen in de notenbalk als voorteken kunnen dus zeven verschillende toonsoorten betekenen: bes majeur, g mineur. En ook es lydisch, f mixolydisch, c dorisch, d frygisch en a lokrisch. Dat van die zeven toonladders die je met deze zeven tonen kunt maken er nu meestal maar twee gebruikt worden (majeur en mineur), dat is dan weer wél cultureel bepaald.

Nog even de zeven toonsoorten die je met de zeskwintenreeks es bes f c g d a kunt maken op een rijtje. Geel is de zeskwintenreeks waarvan de toonladders gemaakt worden. Oranje zijn de toonladders die uit die zeskwintenreeks ontstaan. En de grondtoon is dik omrand.

Lydisch:	as	es	bes	f	c	g	d		as	bes	c	d	es	f	g	as
Ionisch (=majeur):	as	es	bes	f	c	g	d		es	f	g	as	bes	c	d	es
Myxolydisch:	as	es	bes	f	c	g	d		bes	c	d	es	f	g	as	bes
Dorisch:	as	es	bes	f	c	g	d		f	g	as	bes	c	d	es	f
Eolisch (=mineur):	as	es	bes	f	c	g	d		c	d	es	f	g	as	bes	c
Frygisch:	as	es	bes	f	c	g	d		g	as	bes	c	d	es	f	g
Lokrisch:	as	es	bes	f	c	g	d		d	es	f	g	as	bes	c	d

We zagen dus dat er 15 mogelijke reeksen van zeven tonen zijn. En van elke reeks kun je zeven toonladders maken. Dus bestaan er in totaal 15 x 7 = 105 verschillende toonladders.

Grondtoon plus toongeslacht beschrijven samen de toonsoort, bijvoorbeeld c mineur.

15. Hoe vind je een toonladder? Hoe vind je een toonsoort?

Stel: we willen weten welke toonladder de toonsoort b majeur heeft. We weten: een toonladder bestaat uit een reeks van zeven tonen die telkens een kwint van elkaar verschillen. We weten ook: majeurtoonladder betekent een reeks van zeven tonen die een kwint van elkaar verschillen met de tweede toon als grondtoon. We zoeken de b op. Dat moet dan de nummer twee zijn van een rijtje van zeven. Dus gaat het om

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

We beginnen met b. En de overige tonen zetten we in alfabetische volgorde: cis dis e fis gis ais. En we besluiten met b. De toonladder van b majeur is dus b cis dis e fis gis ais b. We zetten vijf kruisen vooraan de balk.

Welke tonen hebben we nodig voor de toonladder van c mineur? We gaan naar de c. En we weten: die c moet de vijfde toon zijn in het rijtje van zeven. Dus:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

En kijk: nu zien we dat c mineur drie mollen heeft. We beginnen weer met de grondtoon c en zetten vervolgens de andere zes tonen er in alfabetische volgorde achter. En we besluiten met een herhaling van de grondtoon c. Dus: c d es f g as bes c.

Wat voor toonsoort heb je als er -om maar een voorbeeld te noemen- vier kruisen als voortekens staan?

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

Dat kan dus zijn a lydisch, e majeur, b mixolydisch, fis dorisch, cis mineur, gis frygisch, dis lokrisch. Omdat majeur en mineur de overwinnaars zijn van de muziekgeschiedenis zal het wel e majeur of cis mineur zijn.

Aan deze berekeningen is te zien dat het heel handig is om de reeks f c g d a e b paraat te hebben.

16. Pythagoreïsche zeskwintenreeksen

Het pythagoreïsch toonstelsel bevat dus de volgende tonen:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

Het pythagoreïsch toonstelsel bevat 15 zeskwintenreeksen waarvan toonladders gemaakt kunnen worden (tussen fes en bis). Van elke zeskwintenreeks kunnen zeven toonladders gemaakt worden. Elke zeskwintenreeks heeft chromatische verlagingen en verhogingen:

In geel de laddereigen tonen, in blauw de chromatische verlagingen en in rood de chromatische verhogingen.

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis

17. De vijfde boventoon

Revolutie! De Griekse wiskundige Didymos had kritiek op Pythagoras. Pythagoras zat er een beetje naast volgens Didymos door alleen maar met kwinten te werken. Didymos zag dat het pythagoreïsche stelsel gaandeweg steeds lelijkere breuken bevat: 3/2, 9/8, 27/16, 81/64, 243/128 en nog veel erger. Want Pythagoras bouwde zijn hele toonstelsel op met behulp van de derde boventoon (en natuurlijk ook de tweede). Intervallen dus waarin alleen maar de getallen 2 en 3 voorkomen.

Didymos heeft iets groots ontdekt, iets wat ook weer puur op natuurkunde en wiskunde gebaseerd is.
Eigenlijk is -realiseerde Didymos zich- ons toonstelsel niet uitsluitend gebaseerd op de eerste vier boventonen
1ste boventoon = grondtoon
2de boventoon = octaaf
3de boventoon = octaaf + kwint
4de boventoon = dubbeloctaaf
maar ook op de vijfde boventoon. De vijfde boventoon -begreep hij- ligt aan de basis van de terts. De terts is dus niet een opeenstapeling van kwinten, zoals Pythagoras dacht, maar de terts is gebaseerd op de vijfde boventoon:
5de boventoon = dubbeloctaaf + terts
En de zesde boventoon mag ook meedoen, want die is een herhaling van zetten:
6de boventoon = dubbeloctaaf + kwint.

Belangrijk:
7de boventoon doet niet mee!
De 7de boventoon maakt geen deel uit van ons toonstelsel. De zevende boventoon ligt niet aan de basis van de septiem, want de septiem is een kwint plus een terts. De zevende boventoon *bestaat* natuurlijk wel, maar hij klinkt heel erg vals. Ook hogere priemgetallen doen niet mee, de 11de boventoon, de 13de boventoon, enzovoorts. Dus boventonen met de nummers 7, 11, 13 en verdere priemgetallen passen niet in het natuurlijke toonstelsel. Ze heten ekmelische boventonen. De andere emmelisch.

8ste boventoon = driedubbeloctaaf doet wel weer mee. De verzameling emmelische boventonen: $\{2^x.3^y.5^z \mid x, y, z \in N \text{ of } 0\}$.

Pythagoras maakte alleen maar kwintsprongen en gebruikte dus alleen maar de factor (2 en) 3, Didymos voegde er tertssprongen aan toe en snapte dat de factor 5 ook meedeed. Aristoteles was het met hem eens. Tegenover het pythagoreïsche stelsel stelde Didymos het natuurlijke of reine stelsel. Ari tegen Pyth!

18. Het natuurlijke of reine toonstelsel

Even voor de duidelijkheid: het natuurlijke of reine toonstelsel wordt gebruikt door zangers en strijkers. Die kunnen namelijk flexibel omgaan met toonhoogtes. Pianisten en blazers kunnen dat niet en zitten daardoor met een probleem dat in hoofdstuk 22 uitgelegd wordt.

Om het pythagoreïsche stelsel, gebaseerd op kwinten (waarbij octaafsprongen willekeurig gemaakt mogen worden, die we hier dus kunnen negeren) weer te geven, hadden we maar één (horizontale) dimensie nodig van kwintsprongen. Nu voegen we verticaal een extra dimensie toe: tertssprongen.

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
5^{2}	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis								
5^{1}	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis				
5^{0}	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis
5^{-1}					feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis
5^{-2}									feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis

Horizontaal maken we kwintsprongen (factor 3). We zetten verticaal stapjes van een factor 5: tertssprongen. Je krijgt in die extra horizontale rijen weer de bekende reeks f c g d a e b, maar dan een eindje opgeschoven. Dan krijg je veel eenvoudigere breuken. Didymos zei dus eigenlijk: vervang sommige lelijke, ingewikkelde pythagoreïsche breuken door breuken met factor 5. Zoek het dichter bij huis door gebruik te maken van de vijfde boventoon. Het toonstelsel bestaat dan niet langer uit een lange, eendimensionale reeks van 35 tonen, maar uit een groep van tonen die veel eenvoudigere frequentieverhoudingen hebben en dichter bij elkaar liggen. Je kunt dan links en rechts volstaan met veel minder stappen. En Aristoteles stond te juichen!

19. Natuurlijke zeskwintenreeksen

Net als in het pythagoreïsche toonstelsel zijn er in het natuurlijke toonstelsel vijftien verschillende zeskwintenreeksen.

Maar: nu wordt meteen duidelijk wat er ingewikkeld is aan het natuurlijke toonstelsel: elke toon heeft twee varianten. Alleen bij de middelste toon vallen de twee varianten samen. In de praktijk wordt soms voor de ene variant, soms voor de andere variant, soms zelfs voor de pythagoreïsche variant gekozen. De eerste zeskwintenreeks:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
5^{2}	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis								
5^{1}	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis				
5^{0}	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis
5^{-1}					feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis
5^{-2}									feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis

De tweede zeskwintenreeks:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
5^{2}	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis								
5^{1}	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis				
5^{0}	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis
5^{-1}					feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis
5^{-2}									feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis

En schuif telkens één toon naar rechts tot je aankomt bij:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
5^{2}	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis								
5^{1}	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis				
5^{0}	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis
5^{-1}					feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis
5^{-2}									feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis

20. Natuurlijke toonladders

Ook in het natuurlijke toonstelsel kun je van elke van de 15 zeskwintenreeksen zeven verschillende toonladders maken, in totaal dus 15 x 7 = 105 toonladders. Als voorbeeld nemen we de zeskwintenreeks as-d en het toongeslacht majeur, dus de toonsoort es majeur. In oranje de laddereigen tonen en in geel de alternatieve tonen. Omkaderd: de grondtoon.

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
5^{2}	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis								
5^{1}	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis				
5^{0}	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis
5^{-1}					feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis
5^{-2}									feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis

Als tweede voorbeeld de zeskwintenreeks es-a en toongeslacht mineur, dus g mineur:

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
5^{2}	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis								
5^{1}	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis				
5^{0}	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis
5^{-1}					feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis
5^{-2}									feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis

21. Natuurlijke chromatiek

De laddereigen tonen hebben telkens twee varianten en datzelfde geldt voor de chromatische tonen. De eerste van de vijftien zeskwintenreeksen met telkens twee varianten (voorbeeld es en es) met chromatische verlagingen (ook in twee varianten eses en eses) en chromatische verhogingen (ook in twree varianten e en e):

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
5^{2}	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis								
5^{1}	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis				
5^{0}	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis
5^{-1}					feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis
5^{-2}									feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis

Chromatisch verlagen kan dus op twee verschillende manieren. Eerste manier: ga drie stappen naar links (=1/27) en één naar beneden (=1/5), samen 1/135, aangevuld met een macht van 2: 128/135. Tweede manier: ga één stap naar rechts (=3) en twee naar beneden (=1/25), samen 3/25, aangevuld met een macht van 2: 24/25.

Chromatisch verhogen kan ook op twee verschillende manieren. Eerste manier: ga drie stappen naar rechts (=27) en één naar boven (=5), samen 135, aangevuld met een macht van 2: 135/128. Tweede manier: ga één stap naar links (=1/3) en twee naar boven (=25), samen 25/3, aangevuld met een macht van 2: 25/24.

In totaal bestaat het natuurlijke toonstelsel dus uit de volgende intervallen:
Van:... Tot:...

	3^{-17}	3^{-16}	3^{-15}	3^{-14}	3^{-13}	3^{-12}	3^{-11}	3^{-10}	3^{-9}	3^{-8}	3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}
5^{2}	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis								
5^{1}	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis				
5^{0}	feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis	disis	aisis	eisis	bisis
5^{-1}					feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis	bis	fisis	cisis	gisis
5^{-2}									feses	ceses	geses	deses	ases	eses	beses	fes	ces	ges	des	as	es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis	gis	dis	ais	eis

Ons reine toonstelsel bestaat uit de volgende verzameling intervallen: $\{2^{x}.3^{y}.5^{z} \mid x, y, z \in Z; -13 \leq y^{*} \leq 13; -2 \leq z \leq 2\}$.

*Als z=2 dan -7≤ y≤ 9. Als z=1 dan -10≤ y≤13. Als z=0 dan -13≤ y≤ 13. Als z=-1 dan -13≤ y≤ 10. Als z=-2 dan -9≤ y≤ 7.

chromatisch verlaagd laddereigen chromatisch verhoogd

22. De muziekpraktijk

In de muziekpraktijk worden door zangers en strijkers soms de verschillende varianten van een interval naast elkaar gebruikt, afhankelijk van bijvoorbeeld een stijgende of juist een dalende melodie, of vanwege een verandering van toonsoort binnen een muziekstuk (modulatie). Zo is een sprong van een hele toon soms het interval 9/8, soms 10/9.

Blaas- en toetsinstrumenten hebben een groter probleem. De toonafstanden liggen vast en kunnen dus niet aangepast worden aan een bepaalde toonsoort of aan het stijgen, respectievelijk dalen van een melodie. Daarvoor zijn het verleden allerlei oplossingen bedacht. De radicaalste oplossing, zoals bij het stemmen van een piano, is de gelijkzwevende stemming, die alle modulatieproblemen oplost, maar wel tenkoste van de reinheid.

23. De evenredig zwevende stemming

De evenredig zwevende stemming lost de problemen van het Pythagoreïsche toonstelsel en het natuurlijke toonstelsel bij blaas- en toetsinstrumenten aldus radicaal op: Het octaaf wordt opgedeeld in twaalf gelijke stappen van een halve toon. De frequentie van de volgende toon is altijd 2 tot de macht 1/12 hoger dan de vorige toon. De twaalf halve tonen binnen een octaaf staan dus in de volgende verhouding tot elkaar: $2^{0/12}$ $2^{1/12}$ $2^{2/12}$ $2^{3/12}$ $2^{4/12}$ $2^{5/12}$ $2^{6/12}$ $2^{7/12}$ $2^{8/12}$ $2^{9/12}$ $2^{10/12}$ $2^{11/12}$ $2^{12/12}$. Het evenredig zwevend toonstelsel over alle octaven bestaat dus uit de verzameling van intervallen 2 tot de macht x/12 waarbij x een element is uit Z.
Dus: $\{2^{x/12} \mid x \in Z\}$.
Wel zijn alle intervallen, behalve het octaaf, dus min of meer vals.

24. Conclusie

Ons natuurlijke of reine toonstelsel is gebaseerd op natuurkundige verschijnselen, die wiskundig beschreven kunnen worden. Het bestaat uit de verzameling intervallen, gebaseerd op de harmonische boventonen met de nummers $\{2^x.3^y.5^z \mid x, y, z \in N \text{ of } 0\}$. Die intervallen kunnen geschreven worden als het product van machten van de eerste drie priemgetallen. Het natuurlijk toonstelsel is de verzameling intervallen $\{2^x.3^y.5^z \mid x, y, z \in Z; -13 \leq y^* \leq 13; -2 \leq z \leq 2\}$.
*Als $z=2$ dan $-7 \leq y \leq 9$. Als $z=1$ dan $-10 \leq y \leq 13$. Als $z=0$ dan $-13 \leq y \leq 13$. Als $z=-1$ dan $-13 \leq y \leq 10$. Als $z=-2$ dan $-9 \leq y \leq 7$.
x is niet begrensd, want je kunt eindeloos octaafsprongen maken. Al kom je op een gegeven moment wel onder of boven de gehoorgrens. Het aantal kwintsprongen naar links en rechts is beperkt tot dertien en het aantal tertssprongen naar boven en beneden is beperkt tot twee. Dus, ons toonstelsel: puur natuur!

Begrippenlijst

boventoon: een regelmatige luchttrilling met een hogere frequentie dan die van de grondtoon
chromatische toon: een incidentele verhoging of verlaging van een laddereigen toon
dominant: de toon een kwint boven de grondtoon
dorisch: toongeslacht met de vierde van de zeven tonen van een zeskwintenreeks als grondtoon
driedubbeloctaaf: interval met de frequentieverhouding tussen twee tonen van 1:8
dubbele mol: een teken voor het twee keer verlagen van een toon
dubbelkruis: het teken voor het twee keer verhogen van een toon
dubbeloctaaf: een interval met de frequentieverhouding tussen twee tonen van 1:4
ekmelische boventoon: een harmonische boventoon die niet past in het natuurlijke toonstelsel, met de rangnummers 7, 11, 13 en alle volgende priemgetallen
emmelische boventoon: een harmonische boventoon die past in het natuurlijke toonstelsel, met een rangnummer dat te ontbinden is in de factoren 2, 3 en 5
eolisch: toongeslacht met de vijfde van de zeven tonen van een zeskwintenreeks als grondtoon; gelijk aan mineur
evenredig zwevende stemming: stemming waarbij elke volgende halve toon een frequentie heeft die een factor $2^{1/12}$ hoger is dan de frequentie van de vorige toon, gebruikt bij toets- en blaasinstrumenten
evenredig zwevend toonstelsel: toonstelsel bestaande uit de intervallen $2^{x/12} \mid x \in Z$
exponent: geeft aan welke macht een getal heeft, bijvoorbeeld $25 = 5 \times 5 = 5^2$; het kleine tweetje is de exponent
frequentie: aantal luchttrillingen per seconde, uitgedrukt in Hz (hertz)
frygisch: toongeslacht met de vijfde van de zeven tonen van een zeskwintenreeks als grondtoon
geluid: een longitudinale luchttrilling
grondtoon: centrale toon van een toonladder
harmonische boventoon: een boventoon met een frequentie die een veelvoud is van de frequentie van de grondtoon
gehele getallen: natuurlijke getallen plus hun negatieve equivalenten plus het getal 0
herstelteken: een teken dat een mol of een kruis ongedaan maakt
hertz (Hz): eenheid om de frequentie van luchttrillingen weer te geven
interval: de frequentieverhouding tussen twee tonen
ionisch: toongeslacht met de tweede van de zeven tonen van een zeskwintenreeks als grondtoon; gelijk aan majeur

kruis: een teken voor de verhoging van een toon
kwart: interval met de frequentieverhouding tussen twee tonen van 1:5/4
kwint: interval met de frequentieverhouding tussen twee tonen van 1:3/2
laddereigen toon: een toon die deel uitmaakt van een toonladder
lokrisch: toongeslacht met de zevende van de zeven tonen van een zeskwintenreeks als grondtoon
longitudinale golf: trilling in de richting van de beweging, anders dus dan een transversale golf
lydisch: toongeslacht met de eerste van de zeven tonen van een zeskwintenreeks als grondtoon
majeur: toongeslacht met de tweede van de zeven tonen van een zeskwintenreeks als grondtoon; gelijk aan ionisch
mineur: toongeslacht met de vijfde van de zeven tonen van een zeskwintenreeks als grondtoon; gelijk aan eolisch
mixolydisch: toongeslacht met de derde van de zeven tonen van een zeskwintenreeks als grondtoon
modulatie: een verandering van toonsoort binnen één muziekdeel
mol: een teken voor de verlaging van een toon
natuurlijk: werkend met intervallen die te schrijven zijn als het product van machten van de eerste drie priemgetallen; gelijk aan rein; zie ook natuurlijk toonstelsel
natuurlijk toonstelsel: toonstelsel bestaande uit de intervallen $2^x.3^y.5^z \mid x, y, z \in Z$
natuurlijke getallen: getallen zoals je telt: 1, 2 , 3, 4, enzovoorts
octaaf: interval met de frequentieverhouding tussen twee tonen van 1:2
pentatonische toonladder: een reeks van vijf tonen die één kwint van elkaar verschillen in de volgorde grondtoon, dan alfabetisch geordende overige tonen en herhaling van de grondtoon, maar dan één octaaf hoger
priemgetal: natuurlijk getal met precies twee delers
pythagoreïsch toonstelsel: toonstelsel bestaande uit octaven en kwinten: $2^x.3^y \mid x, y \in Z$
rein: werkend met intervallen die te schrijven zijn als het product van machten van de eerste drie priemgetallen; gelijk aan natuurlijk; zie ook natuurlijk toonstelsel
stamreeks: de kwintenreeks f c g d a e b
subdominant: de toon een kwint onder de grondtoon
terts: interval met de frequentieverhouding tussen twee tonen van 1:5/4
tonica: grondtoon
toon: een regelmatige luchttrilling
toongeslacht: een bepaalde ordening van hele en halve tonen rond de grondtoon

toonladder: een reeks van zeven tonen die één kwint van elkaar verschillen in de volgorde grondtoon, dan alfabetisch geordende overige tonen en herhaling van de grondtoon, maar dan één octaaf hoger
toonsoort: een aanduiding van grondtoon en toongeslacht, bijvoorbeeld bes majeur
transversale golf: trilling dwars op de richting van de beweging, anders dus dan een longitudinale golf
zeskwintenreeks: een reeks van *zeven* tonen die één kwint van hun buurman verschillen